数理解析研究所講究録
25巻 1967年 105-114

2水準4λ型直交表における交互作用の問題

竹内　啓

2水準多因子の直交表には、ふつうに用いられている2^n型のもの以外に、Hadamard行列によって与えられる(4λ, 4λ−1)型のものがあることはよく知られている。(Placket-Burman他)。

しかし4λ型のものは2^n型のものにくらべると、実際に用いられることが少いように思われる。その理由の一つは、このような型の直交表においては交互作用の交絡関係が明らかでないという点にあると思われる。そこでいくつかの問題が生ずる。

1° 4λ型の直交表について、交互作用の構造を明きらかにすること。

2° 交互作用に関して、何らかの意味で望ましい配列を求めること。

この2つの問題については、これまであまりしらべられていないようである。以下気のついた二三の点について簡単にのべたい。

まず1°について。

定理1. λが奇数ならば 4λ行からなる直交表の任意の2列

の交互作用は、他のいかなる列とも直交しない。

証明　a, b, c の3列をとって考える

a	b	c	行の数	a	b	c	行の数
+	+	+	m行	−	−	+	m
+	+	−	λ−m	−	+	−	m
+	−	+	λ−m	+	−	−	m
−	+	+	λ−m	−	−	−	λ−m

上記のような各行の数を考えると、直交表であることから、＋＋＋の行の数をmとすると、上のようになる。従って例えば a×b とCとの積和を作ると、結局 a×b×c の和となって、$4m - 4(\lambda - m) = 4(2m - \lambda)$ となり、λが奇数ならばこれは0にならない。

(Q. E. D.)

しかしながら、ある種の直交表においては、交互作用と主効果との交絡の構造は、少くとも一部は比較的簡単な構造を持っている。

例えば Placket − Burman の12行11列の直交表において(1)列×(2)列と各列との積和を計算すると次のようになっていることが確かめられる。

0　0　4　4　4　−4　4　4　−4　−4　4

従って(1)列，(2)列に割りつけられた因子の主効果，交

互作用と (3)列以下に割りつけられた因子の主効果(必要な場合には符号を変えて)とについて正規方程式を作ると、その係数行列は 次のようになる

$$
\begin{array}{cccccc}
(1) & (2) & (1)\times(2) & (3) & (4) & \cdots \\
12 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 12 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 12 & 4 & 4 & \cdots \\
0 & 0 & 4 & 12 & 4 & \cdots \\
0 & 0 & 4 & 4 & 12 & \cdots \\
\cdots & & \cdots & & &
\end{array}
$$

従ってその逆行列は

$$
\begin{array}{cccccc}
1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & \dfrac{3}{4(9-k)} & -\dfrac{1}{4(9-k)} & -\dfrac{1}{4(9-k)} & \cdots \\
0 & 0 & -\dfrac{1}{4(9-k)} & \dfrac{10-k}{12(9-k)} & \dfrac{1}{12(9-k)} & \cdots \\
0 & 0 & -\dfrac{1}{4(9-k)} & \dfrac{1}{12(9-k)} & \dfrac{10-k}{12(9-k)} & \cdots \\
 & & \cdots & & &
\end{array}
$$

従って、(3)列以下の主効果について推定の相対効率は $(9-k)/(10-k)$ となる。それ故、$k \leqq 5$ 程度、すなわち7個程度の因子について主効果を考え、かつそのうちの2個の因

子のみの交互作用が問題とされ、それ以外の交互作用は全く無視してよいならば、このような直交表を用いることによって、かなり効率のよい実験ができるといえよう。

しかしこの場合でも、2つ以上の交互作用を問題にすると、その交絡の構造は極めて複雑になる。

ところでPlacket-Burmanの表について、2因子交互作用と主効果との積和がすべて±4になるのは、隣り合う2列の交互作用に関してであって、他のすべての列についてそうなっているとはいえない。また他の、より行の数の多い表については、隣り合う列についても、このことは成りたつとは限らないようである。

次に4λ行$4\lambda-1$列の直交表Aが与えられた場合、これを次のような形に拡張して作られる8λ行$8\lambda-1$列の表については、次のような性質がある。

$$
\begin{array}{ccc}
1 & & \\
\vdots & A & A \\
1 & & \\
-1 & & \\
\vdots & -A & A \\
-1 & &
\end{array}
$$

すなわち、最初の4λ列については、そのうちの任意の3列

の積和はすべて0になる。すなわちこの3列に割りつけられた因子については，2因子交互作用と主効果は直交している。従って，4λ個以下の因子を最初の4λ列の中に割りつければ，主効果はすべて2因子交互作用と交絡することなく推定される。従って2因子交互作用の存在が疑われ，しかもその値そのものの推定は必要としないような場合には，このような配置は有効に用いることができるであろう。しかもこのような配列は最適のものということができる。すなわち

定理2　8λ行m列の直交表において，任意の2列の交互作用が他の主効果とすべて直交するならば，$m \leqq 4\lambda$ である。

証明　(1)(2)‥(m)列に (1)×(2)，(1)×(3)‥(1)×(m)列をつけ加えて $2m-1$ 列を作ると，これらの各列は定理の條件の下ではすべて直交する。従って $2m-1 \leqq 8\lambda-1$，$m \leqq 4\lambda$。

(Q.E.D.)

この場合，更に3つの因子の交互作用 (1)×(2)，(2)×(3)，(3)×(1) をとると，これらは互いに直交している。従ってもしこのような交互作用のみが存在し，他の交互作用は無視してよいとすれば，すべての作用は互いに直交することになる。

またここで特に第1列については，それと他の列との交互作用はすべて互に直交するのみならず，他の2列の交互作用との関係を簡単に表現できる場合が多い。従って特定の因子

との間の交互作用以外はすべて無視できる場合、あるいはそれ以外に1つの交互作用のみが問題になる場合には、このような配列は有効に利用される。

従って例えば、12行11列の表を拡張した24行23列の表の左半分を用いることによって、12個までの因子の主効果と交互作用と交絡せずに推定でき、また考えられる効果以外の交互作用はすべて存在しないとすれば、12個までの因子の主効果と $A\times B$, $B\times C$, $C\times A$ という3つの交互作用が、或いは $A\times B$, $A\times C$, $A\times D$ … という形の交互作用をすべて推定することができる。また必ずしも直交しなくてよいとすれば、このほかに1つの交互作用例えば $B\times C$ を推定することも容易である。

更にこの表の右半分については、その2因子交互作用は左半分の列の主効果とは直交する。従ってその中から2つの列をえらんで2つの因子を割りつければ、その主効果、交互作用ともに他のすべての主効果と直交することになる。更にその主効果は第1列と左半分の対応する列以外の列との交互作用とも直交している。

この考え方を拡張して、$4\lambda \times (4\lambda - 1)$ の直交表 A から次のようにして $16\lambda \times (16\lambda - 1)$ の直交表を作る。A の左にすべて $+1$ からなる列をつけ加えたものを $\tilde{A}$ と表わして、

$$
\begin{array}{cccc}
\tilde{A} & \tilde{A} & \tilde{A} & A \\
\tilde{A} & -\tilde{A} & -\tilde{A} & A \\
-\tilde{A} & \tilde{A} & -\tilde{A} & A \\
-\tilde{A} & -\tilde{A} & \tilde{A} & A
\end{array}
$$

そうすると、各4λ列からなる最初の3組の列については、異る3組から1列づつとった場合以外の3列の積和はすべて0になる。また最初の3つの組のうちの異る2組からとった2列と最後の4λ−1列のうちの任意の1列との積和、或いは最後の組の中の2列とそれ以外の組の列との積和は0になる。このことから、主効果と交互作用の直交する3組を求めることができる。また若干の4列の積和，例えば最初の3組の列のうち1組から3列、他の組から1列，或いは1組から2列他の2組から1列づつとったものは0になる。従っていくつかの2因子交互作用相互、或いは主効果と3因子交互作用は直交している。

従って例えば、3組の因子があり、それぞれの組の因子の数が4λ以下，2因子交互作用について、それぞれの組の同じ組に属する因子間では存在が疑われるが、異る組の間の因子についてはそれを無視してよいことがわかっているとき、この3組の因子を上記の表の最初の3組の列に割りつけることによって有効な実験を行うことが可能になる。

次にすべての2因子交互作用が交絡していないような配列を考えよう。

定理3. 任意の4列以下の積和がすべて0になるような直交表は強さ4の直交表になる。すなわち任意の4列について、すべての可能な符号の組み合わせ $2^4=16$ 通りが同じ回数ずつ現われていなければならない。

証明は定理1と全く同様にして場合の数を数え上げればよい。

ところで、16λ 行 m 列の強さ4の直交表が与えられたとすると、これより $m+{}_mC_2=m(m+1)/2$ 列の直交表が得られるはずである。従って $m(m+1)/2 \leq 16\lambda-1$ これより $\lambda=1,\ 2,\ 3,\ 4 \cdots$ のとき $m \leq 5,\ 7,\ 9,\ 10,\ \cdots$ となる。$\lambda=1,\ 2,\ 4,\cdots$ のときには、2^n 型の直交表に帰着するが、この場合でも、現実にこの限界までの大きさの配列が得られるとは限らない。

例えば $\lambda=1$ のときは 2^4 型の直交表から (a) (b) (c) (d) (a×b×c×d) の5列をえらべば 16×5 の強さ4の直交表が得られる。

しかし $\lambda=2$ のとき 2^5 型の直交表から 32×7 の強さ4の直交表を得ることはできない。なぜならば、もしこのようなものが得られたとすると、適当な変換によって ($(a^2)=(b^2)=\cdots=1$ を用いて) そのうちの5列が (a) (b) (c) (d) (e) であ

ることすることができる．しかしそのとき残りの2列は少くとも4つの文字の積となっていなければならない．しかし4つ以上の文字の積からなる2列をつくるとき，それらの交互作用は必らず，いづれかの文字或いは2文字の積と交絡してしまうからである．2^n型について可能な型の表は奥野忠一氏が計算しておられる．

2^n型以外の場合，例えば $s=3$ のとき48行5列の強さ4の表が作られることは容易に確かめられるが6列以上の表は作ることができるであろうか？この問題については，まだわかっていない．

2°の問題について，上記にのべた配列以外になお何らかの意味で望ましさを持った配列が得られるであろうか．これについて新しい表を作る試みはまだなされていないようであるが，上にのべたような表から，ある種の性質を持った表を導き出すことは可能である．すなわち交互作用を表わす列をふくんだ直交表を書き表わすことができる．

例えば24行からなる直交表について，先にのべたように 12×11 の直交表から作られるものをとれば，その各列は，

$(1),\ (2),\ \cdots\ (12),\ (1)\times(2),\ (1)\times(3),\ \cdots\ (1)\times(12)$

となる．

或いは、この右半分を除いて、その代りに

(1), (2), (3), (12), (1)×(2) (1)×(3) (2)×(3)

という形の構造を持つ15列等が得られる。

この場合には、これが一つの限界に達している。というのはもし (1)×(2), (3)×(4) という２つの交互作用が互いに直交するとすれば (1)×(2)×(3)×(4) の積和が０とならねばならず、従って定理３と同様に考えて、行の数が16の倍数にならねばならないことが示されるからである。

40行からなる直交表についても、ほぼ同様のことがいえる。

一般的にいって行の数が2^n型でないときには、交互作用の点から効率のよい配置はあまり得られないようである。しかしなお一層の分析は必要であろう。